# Przebłyski

Przebłyski towarzyszą uczniom, którzy rozwiązują problemy, nauczycielom, którzy próbują zrozumieć jak myślą uczniowie. Przebłyski rzucają nowe światło na rzeczy. Przebłyski inspirują.

Zdjęcie: master1305 na freepik.com

*Śledzenie, uczenie się i tworzenie dowodów zastąpmy tłumaczeniem dostrzeżonej własności i stopniowym ulepszaniem tłumaczenia. Taki kierunek umożliwi stały aktywny udział wszystkich uczniów: każdy może próbować lepiej wytłumaczyć, każdy może wskazywać dostrzeżone wady w tłumaczeniu kolegi czy nauczyciela, a różne tłumaczenia porównywać i wartościować.*

Turnau S., *O dowodzeniu twierdzeń we współczesnej szkole*, NiM 45 (2003), s.24-29

# Przekonaj mnie!

**Monika Jakubowska-Mirek, Ewa Stożek**

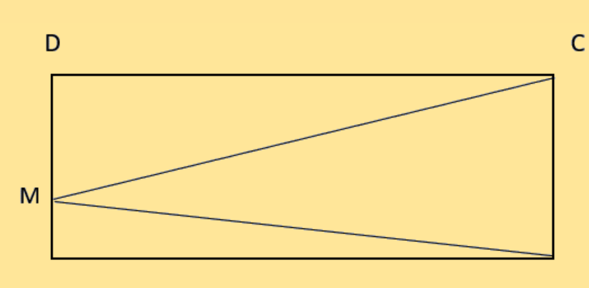
Zadania na dowodzenie są wyjątkowe trudne dla uczniów. Nie oznacza to jednak, że należy takich zadań unikać. Wręcz przeciwnie, stanowią one istotę matematyki. I nie chodzi nam o precyzyjny dowód matematyczny w rozumieniu akademickim. O szkolnym dowodzie myślimy, że jest to logiczne **uzasadnienie** tego, że pewna własność jest konsekwencją pewnych warunków i zachodzi zawsze, gdy te warunki są spełnione. Geometryczne zadanie na dowodzenie pojawiło się także w teście Diagnozy 2021 (patrz ramka poniżej). Zadanie opisujemy i analizujemy w raporcie *Monitorowanie osiągnięć uczniów w 2021 roku,* który powstał w ramach diagnozy uczniów klas VIII ostrołęckich szkół podstawowych z zakresu matematyki.

## Diagnoza 2021 w Ostrołęce

We wrześniu 2021 roku do diagnozy umiejętności matematycznych w klasach VIII przystąpiło 595 uczniów z 30 oddziałów klasowych ostrołęckich szkół podstawowych. Rozwiązywali oni test matematyczny składający się z 10 zadań zamkniętych oraz 10 zadań otwartych, za które maksymalnie można było uzyskać 30 punktów. Średni wynik z testu to 41% możliwych do uzyskania punktów.

**Zadanie za 2 punkty**

W prostokącie *ABCD* na boku *AD* wybrano punkt *M*. Udowodnij, że pole trójkąta *BCM* jest równe połowie pola prostokąta *ABCD*.




Na egzaminie ósmoklasisty w 2020 roku geometryczne zadanie na dowodzenie (zad.16) miało poziom wykonania 7%. Podobny poziom wykonania miało też zadanie na dowodzenie z Diagnozy 2021 (patrz ramka obok).

| | Ostrołęka |
|---|---|
| **frakcja opuszczeń** | **44%** |
| **poziom wykonania zadania** | **6%** |

Zauważmy, że ponad 40% uczniów w ogóle nie podjęło próby rozwiązania tego zadania.

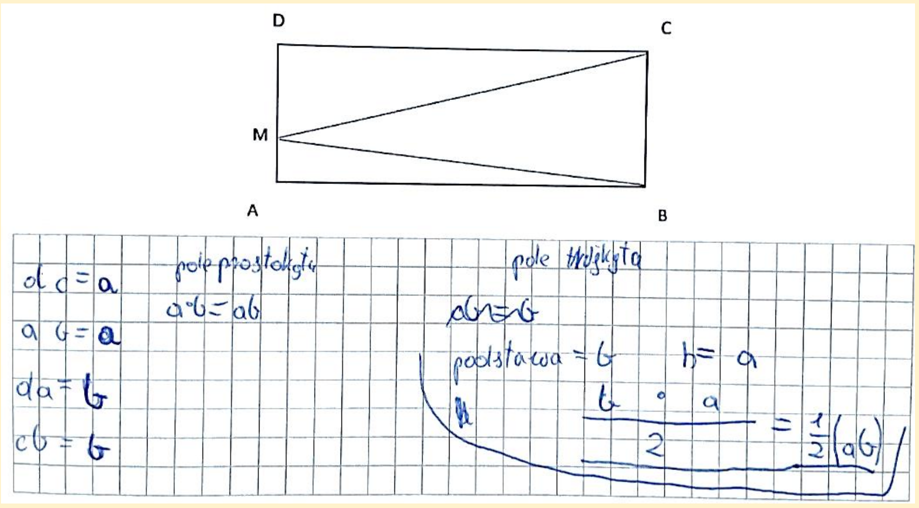
*[...]eliminacja dowodów z matematyki – nawet tej na poziomie elementarnym – byłaby ruchem wbrew jej naturze, krokiem czyniącym z niej obszar na wpół empirycznego poznania, z drugiej zaś dowody i dowodzenie należą w szkole od dawna do najtrudniej akceptowalnych wątków matematyki.*

*Być może usunięcie z wielu programów, a także z podstaw programowych, słowa dowód oraz związanych z nim sformułowań i komentarzy dotyczących dowodzenia, zostało w niektórych przypadkach odczytane jako przyzwolenie na kierunek preferujący jedynie fakty, kosztem uzasadniania tych faktów.*

Konior J., *O dowodach i dowodzeniu we współczesnym nauczaniu matematyki,* NiM nr 57(2006), s. 24–29.

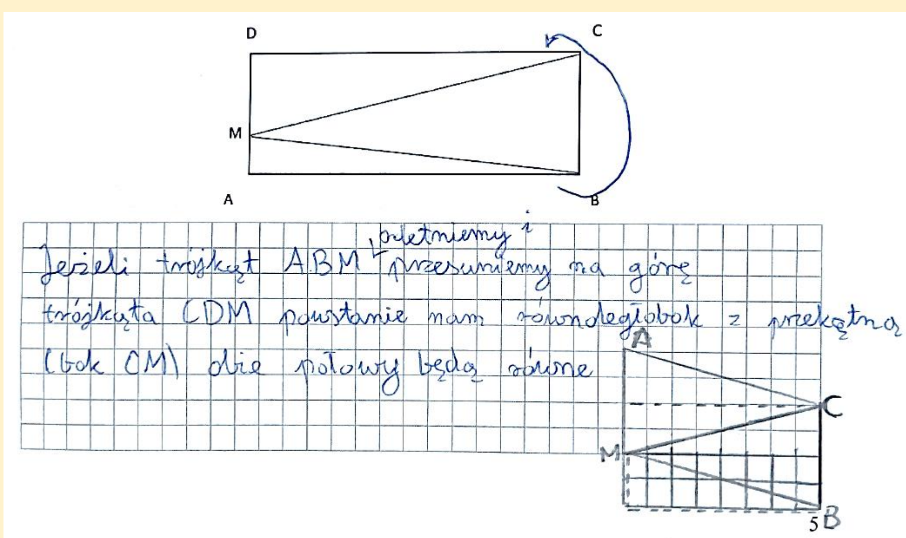
# Uczniowskie dowody

## Podejście 1.
## Metoda algebraiczna



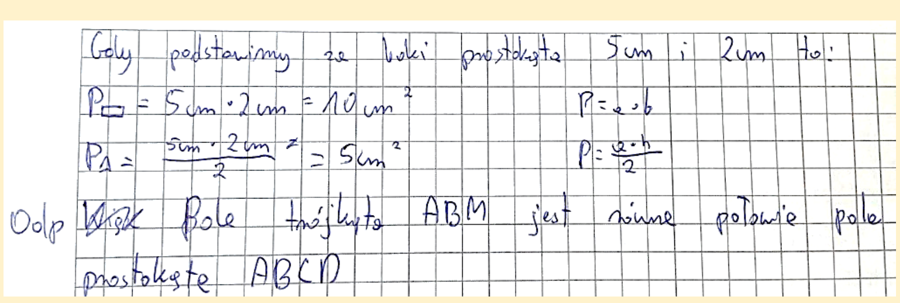

W metodzie algebraicznej uzasadnienie wynika z analizy wzorów na pole trójkąta i pole prostokąta. Powodzenie zależy nie tylko od umiejętności przekształcania wzorów, ale umiejętności logicznego wprowadzania oznaczeń.
W poprawnym uczniowskim rozwiązaniu zamieszczonym obok brak konsekwencji w oznaczeniach utrudnia czytanie rozwiązania.

## Podejście 2.
## Metoda geometryczna



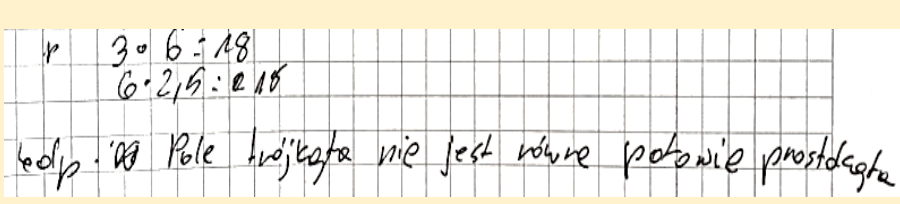

Metoda geometryczna polega na wykorzystaniu własności trójkątów przystających (nie wymagaliśmy dowodu, że trójkąty są przystające, ani nawet użycia tych słów, wystarczyło zauważyć, że trójkąty są „takie same"). Uczniowskie dowody metodą geometryczną cechuje różny poziom precyzji. Obok przedstawiamy zrozumiałe uczniowskie rozwiązanie, ale zdarzają się niejasne rysunki oraz uzasadnienia w rodzaju: *„pole trójkąta ABM jest równie połowie pola prostokąta ABCD, bo jak rozmieścić trójkąt po innemu to wyjdzie połowa"* albo *„jeśli podwoimy trójkąt ABM otrzymamy drugi taki sam, wystarczy jeden przesunąć, a drugi przekręcić"*. Choć za tymi sformułowania kryją się myśli uczniowskie, które odpowiednio doprecyzowane (a na lekcji „wyprostowane" przez nauczyciela) prowadziłyby do logicznego uzasadnienia, ale nie są zrozumiałe bez dodatkowego komentarza.

## Podejście 3.
## Sprawdź zamiast udowodnij




Najczęstszym problemem w uczniowskich dowodach jest sprowadzenie argumentacji do sprawdzenia jednego lub kilku przypadków. Jeśli można to zrozumieć na etapie budowania intuicji „o co chodzi w tym dowodzie", to nie można takiego podejścia akceptować jako dowodu. Szczególnie jest to przykre, gdy z rozwiązania zadania widać, że uczeń włada aparatem matematycznym pozwalającym przedstawić poprawne uzasadnienie, ale wybiera drogę podstawiania konkretnych wartości.

## Podejście 4.
## Zmierz i sprawdź




Innym uczniowskim podejściem jest zmierzenie odcinków danych na rysunku, czyli *de facto* pokazanie, że teza dowodu jest prawdziwa dla danego rysunku. Jeśli uczniowi uda się w miarę precyzyjnie dokonać pomiarów, to potwierdzi słuszność twierdzenia dla swojego rysunku, co oczywiście **nie jest dowodem.** Jeśli nie będzie precyzyjny w mierzeniu odcinków na rysunku, może to go doprowadzić do zaprzeczenia tezie, co zasadniczo jest dowodem przez **kontrprzykład.**

## Podejście 5.
## Dokonaj odkrycia

Dzieląc prostokąt na 3 trójkąty, jeden z nich zawsze będzie równy połowie pola prostokąta, w którym został umieszczony.

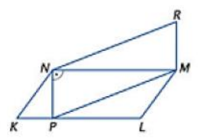
W jednej z prac uczniowskich znalazło się takie uogólnienie. Czy jest prawdziwe? Dowód pozostawiamy uważnemu czytelnikowi.

# Jak pomóc uczniom rozwijać umiejętność argumentowania?

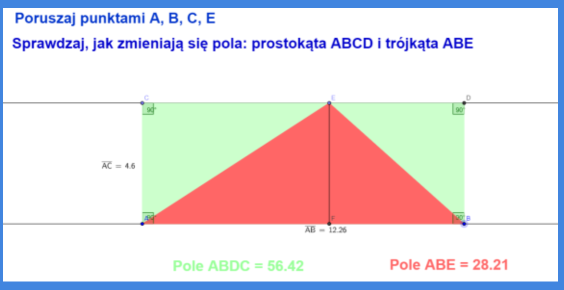
Kiedy zacząć naukę dowodzenia? Od najmłodszych lat, nie nazywając tego dowodzeniem. Dociekanie i przekonywanie stanowią naturalną potrzebę dziecka poznającego świat, pytanie „dlaczego?" dzieci zadają nieustannie. No to teraz my, nauczyciele, pytajmy ich nieustannie **„dlaczego?"**, żeby to naturalne dla matematyki i nauk przyrodniczych pytanie zostało z nimi na zawsze. Wymagajmy uzasadnień, nawet nieprecyzyjnych, a do błędnych odpowiedzi budujmy **kontrprzykłady**. *Na wyszukiwanie kontrprzykładów nie żałujmy czasu, bo to przecież jest uczenie się matematyki* (D. Zaremba, *Sztuka nauczania matematyki w szkole podstawowej*). Mówmy uczniowi „przekonaj mnie!" i bądźmy cierpliwi, gdy ten buduje swoją argumentację.

Poniżej pokazujemy przykład zadania, które sprowadza się do dowodzenia, ale jego sformułowanie jest naturalne dla ucznia (Matematyka z Plusem, klasa V, s.188) i nie straszy słowem „dowód".

Popatrz na rysunek obok. Marysia twierdzi, że równoległoboki *KLMN* i *PMRN* mają równe pola. Czy ma rację? Odpowiedz na to pytanie, nie mierząc odcinków.



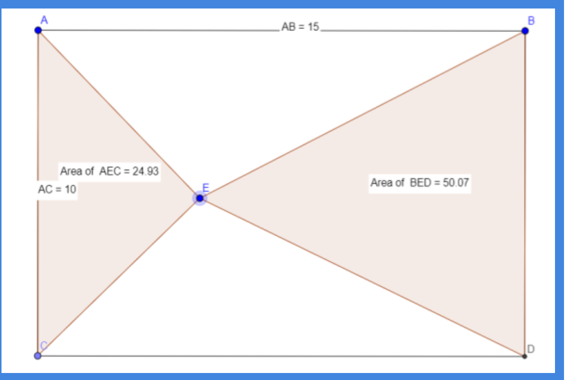

Przygotowaniem do prowadzenia ogólnej argumentacji jest przeanalizowanie szczególnych przypadków. Rozpatrzenie szczególnych przypadków nie wystarczy, ale **buduje intuicję, pozwala formułować hipotezy.** Można to zrobić na lekcji w atrakcyjny sposób korzystając z gotowych apletów GeoGebry. Aplety są bardzo wygodne, ponieważ do ich uruchomienia potrzebna jest jedynie przeglądarka internetowa. Jednocześnie społeczność użytkowników GeoGebry z całego świata chętnie udostępnia gotowe aplety na stronie internetowej www.geogebra.org.




https://www.geogebra.org/m/efZCJ4e9

Zacznijmy od sytuacji najprostszej, czyli apletów, które wspierają ucznia w wyprowadzaniu wzoru na pole trójkąta. Zmieniając położenie punktu E będziemy rozpatrywać trójkąty, o których mowa w zadaniu. Zwróćmy uczniom uwagę na przypadek, gdy punkt E pokrywa się z wierzchołkiem C lub wierzchołkiem D. Czy wtedy pole trójkąta ABE jest połową pola prostokąta ABCD? Dlaczego? Zmieniając położenie punktu E uczniowie mogą poczynić obserwacje, jaka jest zależność między polem trójkąta a polem prostokąta. Zapewne znajdzie się w klasie uczeń, który przesunie punkt E poza odcinek CD. Czy nadal pole trójkąta ABE jest równe połowie pola prostokąta ABCD? Dlaczego? A może to jest prawdziwe tylko dla tego konkretnego prostokąta? A jak można to wykazać w ogólnym przypadku?

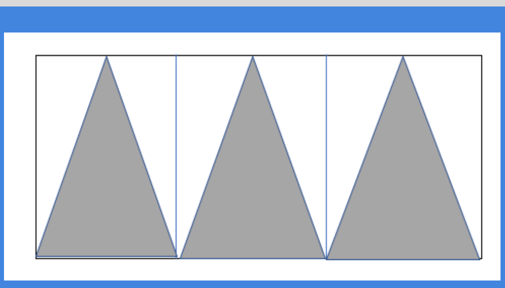
Kolejny aplet pozwoli pójść o krok dalej. Najpierw umiejscowimy punkt E na jednym z boków prostokąta. Możemy wtedy powtórzyć obserwacje poczynione w poprzednim przykładzie. Ale co będzie, jeśli punkt E będzie znajdował się w środku prostokąta? Czy suma pól kolorowych trójkątów jest równa połowie pola prostokąta? Czy istnieje takie położenie punktu E wewnątrz prostokąta, że to nie jest prawdziwe? A na zewnątrz prostokąta ABCD? Dlaczego? Jak to pokazać w ogólnym przypadku?



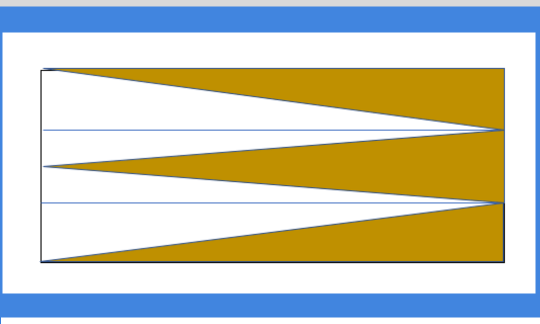

https://www.geogebra.org/m/y8YTsDPA

Zadanie. Pokaż, że suma pól kolorowych trójkątów jest równa połowie pola prostokąta.

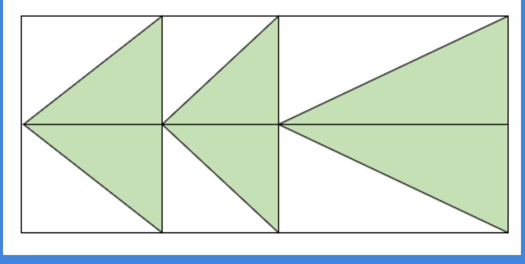
a)



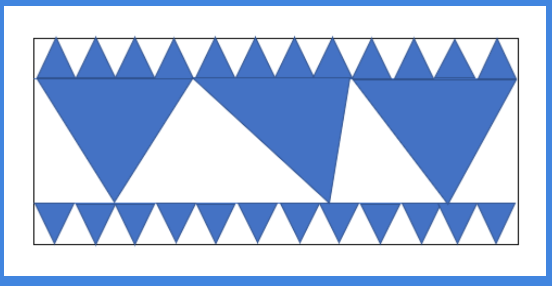
b)



c)



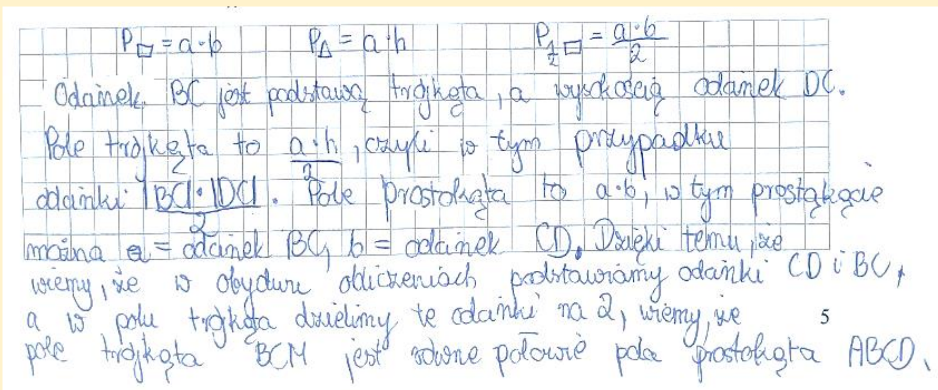
d)



Gdy już „poczuliśmy jak działa" nasze zadanie, to możemy spróbować wraz z uczniami skonstruować podobne. Sądzimy, że propozycji będzie tyle, ilu uczniów i będą się oni prześcigać w pomysłowości – pojawią się wersje królewskie z koroną, wersje świąteczne z choinką, wersje serwetkowe i mnóstwo innych. Obok pokazujemy kilka takich pomysłów. Spróbujmy tę pomysłowość wykorzystać i zapytajmy uczniów: Jak przeprowadzić argumentację, jeśli trójkątów w wersji a) będzie *n*, a w wersji c) każdy z *n* trójkątów będzie miał inną wysokość?

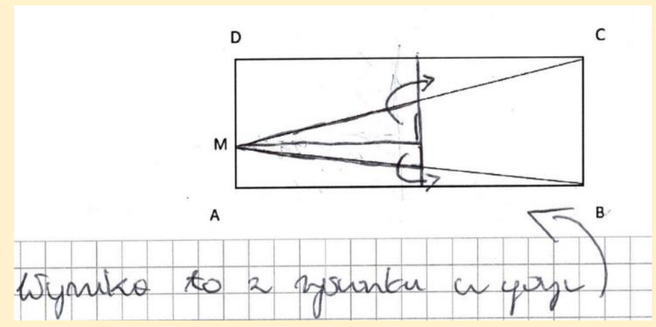
# Jak zapanować nad dowodem?

Rozwiązania uczniowskie pokazują, że uczniowie mają problem z logicznym zapisem swoich myśli. Zdarzają się wyraźnie „przegadane” dowody (jak ten poniżej z lewej strony), albo wręcz maksymalnie lakoniczne (jak ten poniżej z prawej strony). Warto stopniowo przyzwyczajać uczniów do bardziej precyzyjnych zapisów, a pomocne mogą być tabelki z kolejnymi krokami dowodu, jakie można znaleźć np. w poradniku W. Guzickiego *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum. Poradnik nauczyciela matematyki.*

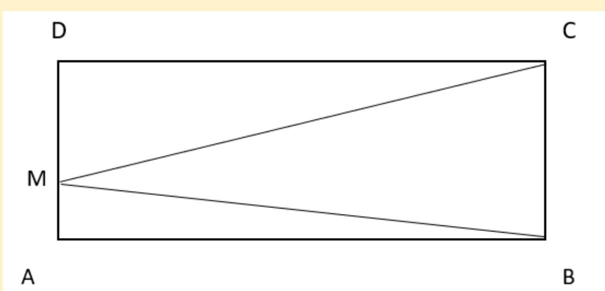

$P_{\square} = a \cdot b$ $P_{\Delta} = a \cdot h$ $P_{\frac{1}{2}\square} = \frac{a \cdot b}{2}$

Odcinek BC jest podstawą trójkąta, a wysokością odcinek DC. Pole trójkąta to $\frac{a \cdot h}{2}$, czyli w tym przypadku odcinki: $\frac{|BC| \cdot |DC|}{2}$. Pole prostokąta to $a \cdot b$, w tym prostokącie można $a$ = odcinek BC, $b$ = odcinek CD. Dzięki temu, że wiemy, że w obydwu obliczeniach podstawiamy odcinki CD i BC, a w polu trójkąta dzielimy te odcinki na 2, wiemy, że pole trójkąta BCM jest równe połowie pola prostokąta ABCD.

....

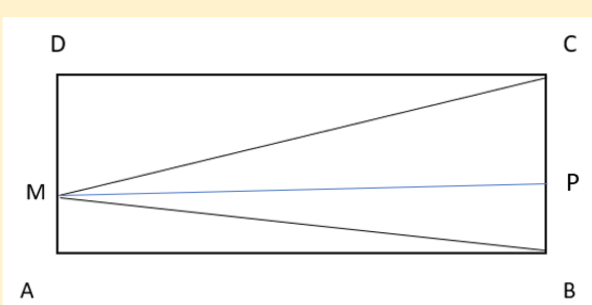



## Dowód algebraiczny




| Nr | Stwierdzenie | Uzasadnienie |
|---|---|---|
| **1.** | $P_{\Delta BCM} = \frac{BC \cdot DC}{2}$ | Pole trójkąta: $P = \frac{ah}{2}$ |
| **2.** | $P_{ABCD} = BC \cdot CD$ | Pole prostokąta: $P = ab$ |
| **3.** | $P_{\Delta BCM} = \frac{P_{ABCD}}{2}$ | 1. i 2. |
| | **c.b.d.o.** | |

## Dowód geometryczny




| Nr | Stwierdzenie | Uzasadnienie |
|---|---|---|
| **1.** | Trójkąty $BMP$ i $MBA$ są przystające | cecha BBB |
| **2.** | Trójkąty $CMP$ i $MCD$ są przystające | cecha BBB |
| **3.** | $P_{ABCD} = 2 \cdot (P_{\Delta CMP} + P_{\Delta BMP})$ | 1. i 2. |
| **4.** | $P_{\Delta BCM} = \frac{P_{ABCD}}{2}$ | 3. |
| | **c.b.d.o.** | |

## O projekcie

**Co już umiemy? Monitorowanie osiągnięć uczniów z zakresu matematyki.**

➲ Kierownik projektu: dr Monika Jakubowska-Mirek

☼ www.pedagog.uw.edu.pl

⦿ Wydział Pedagogiczny Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Mokotowska 16/20, 00-561 Warszawa

Celem projektu jest przekazanie uczniom, nauczycielom, dyrektorom szkół oraz organowi prowadzącemu (gminie) informacji na temat umiejętności matematycznych uczniów na rok przed egzaminem ósmoklasisty.