Przebłyski

Przebłyski towarzyszą uczniom, którzy rozwiązują problemy, nauczycielom, którzy próbują zrozumieć jak myślą uczniowie. Przebłyski rzucają nowe światło na rzeczy. Przebłyski inspirują.

Zdjęcie: pspproductions na freepik.com

Znała suma cała rzeka,
więc raz przybył lin z daleka
i powiada: "Drogi panie,
ja dla pana mam zadanie,
jeśli pan tak liczyć umie,
niech pan powie panie sumie,
czy pan zdoła w swym pojęciu,
odjąć zero od dziesięciu"

(…)

"To dopiero mam z tym biedę.
Może dziesięć? Może jeden?"
Upłynęły dwie godziny,
sum z wysiłku jest już siny.
Myśli, myśli: "To dopiero!
Od dziesięciu odjąć zero!

Jan Brzechwa „Sum

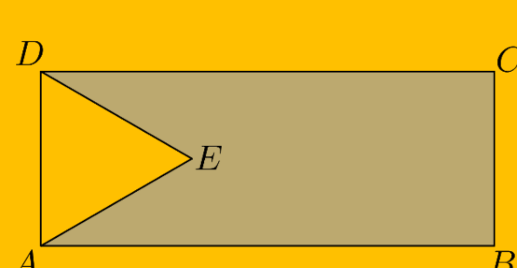
Od dziesięciu odjąć zero

Monika Jakubowska-Mirek, Ewa Stożek

Często jest tak, że zadania zaskakują: uczniów, nauczycieli i/lub autorów zadań. Lubimy takie zadania, bo przy nich trudno wpaść w belferską rutynę. Takim zadaniem było „zadanie o obwodach” z Diagnozy 2022 (patrz ramka), które nas zaskoczyło. Zadanie opisujemy i analizujemy w raporcie *Monitorowanie osiągnięć uczniów w 2022 roku,* który powstał w ramach diagnozy uczniów klas VII z zakresu matematyki. Zadanie ma dwie warstwy: geometryczną, która jest bardzo prosta oraz arytmetyczną, która okazała się niezrozumiała i trudna dla większości uczniów. Mimo tego, wielu uczniów podjęło próbę przekształcenia wyrażenia arytmetycznego, a zastosowane strategie wiele mówią o ich sposobie pojmowania działań na liczbach oraz o tym, jak rozumieją pierwiastki i działania na pierwiastkach. Podczas analizy uczniowskich rozwiązań wielokrotnie przypominał się nam wiersz Jana Brzechwy o sumie matematyku, który miał problem jak od 10 odjąć 0.

Zadanie za 2 punkty

Z prostokąta *ABCD* o obwodzie $\left(15\sqrt{3}+10\right)$ wycięto trójkąt równoboczny *AED* (tak jak na rysunku poniżej), którego obwód wynosi 15. Oblicz obwód zacieniowanej figury.



Najczęściej w tym zadaniu uczniowie uzyskiwali punkt za wykonanie pierwszego kroku niezbędnego do rozwiązania zadania, to jest ustalenie, że bok trójkąta równobocznego jest równy 5. Niektórym ta informacja całkowicie wystarczyła do rozwiązania zadania: odpowiedź, że obwód zacieniowanej figury jest o 5 większy od obwodu prostokąta jest w pełni satysfakcjonującą odpowiedzią.

Diagnoza 2022 w Ostrołęce

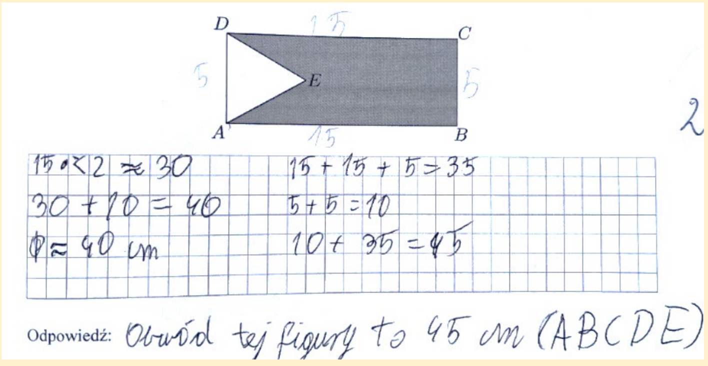
W czerwcu 2022 roku do diagnozy umiejętności matematycznych w klasach VII przystąpiło 572 uczniów z 30 oddziałów klasowych ostrołęckich szkół podstawowych. Rozwiązywali oni test matematyczny składającego się z 10 zadań zamkniętych oraz 10 zadań otwartych, za które maksymalnie można było uzyskać 30 punktów. Średni wynik z testu to 40% możliwych do uzyskania punktów.

Wydawać by się mogło, że to proste zadanie, które nie powinno przysporzyć kłopotu uczniom klasy VII. Jednak okazało się ono najtrudniejszym zadaniem w całym teście 2022.

	Ostrołęka
frakcja opuszczeń	35%
poziom wykonania zadania	18%
pełne poprawne rozwiązania	5%

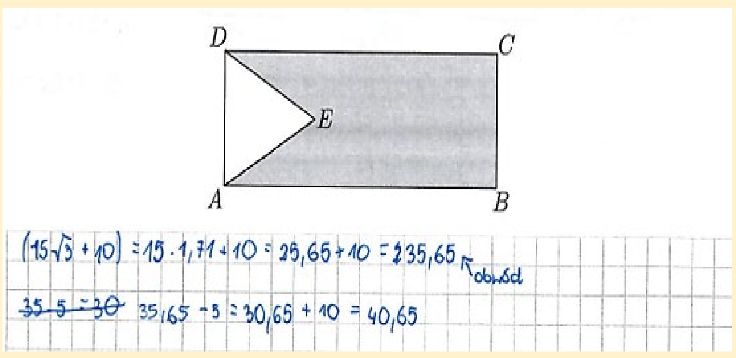
Część uczniów poddała się już na etapie czytania zadania – czy wystraszył ich $\sqrt{3}$, czy może postać zadania geometrycznego, tego nie jesteśmy w stanie ustalić.

Uczniowskie strategie



Strategia 1.
Zapomnijmy o pierwiastkach

Przy tej strategii uczniowie pomijali pierwiastek, przyjmowali jakieś wartości dla boków *AB* i *CD*, *np.* mierzyli odcinki linijką.

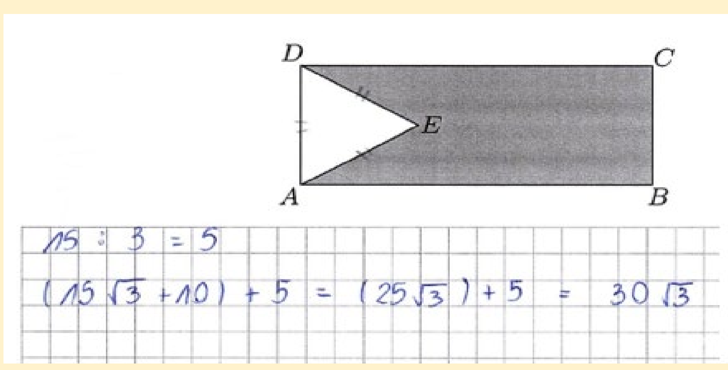


Strategia 2.
Znajdźmy przybliżenie dla $\sqrt{3}$

W pracach uczniów pojawiały się różne przybliżenia $\sqrt{3}$: 1,5; 1,71; 1,73. Ponadto pojawiały się próby usunięcia niewymierności przez włączenie 15 pod znak pierwiastka.

$15\sqrt{3} + 15 = \sqrt{675} + 15 = 26 + 15 = 41$
- próba włączenia 15 pod znak pierwiastka

$15\sqrt{3} = \sqrt{15 \cdot 15 \cdot 3} = \sqrt{375} = 18$
- próba włączenia 15 pod znak pierwiastka



Strategia 3.
Przekształćmy wyrażenie arytmetyczne

Inne tego rodzaju przekształcenia:

$15\sqrt{3} + 10 = 45 + 10$
- znak pierwiastka został utożsamiony z mnożeniem

$15\sqrt{3} + 10 = 5 + 10$
- znak pierwiastka został utożsamiony z dzieleniem

$15\sqrt{3} + 10 = 15 \cdot 9 + 10$
- znak pierwiastka został utożsamiony z potęgowaniem

$15\sqrt{3} + 10 = \sqrt{3} + 25$
- specyficzna „redukcja wyrazów podobnych"

$15\sqrt{3} - 15 = \sqrt{3}$
- specyficzna „redukcja wyrazów podobnych"

Co robić?

W omawianym zadaniu mamy do czynienia z dwoma typami trudności:
1) długość odcinka nie wyraża się liczbą naturalną lub przynajmniej ułamkiem dziesiętnym,
2) wykonanie działań na wyrażeniach arytmetycznych z pierwiastkami.

Z pierwszą trudnością można sobie poradzić wprowadzając do zadań geometrycznych nietypowe długości odcinków, także wyrażone symbolami. Czas, w którym uczniowie klasy VIII zapoznają się z twierdzeniem Pitagorasa jest dobrym momentem na ćwiczenie takich „nienaturalnych" długości odcinków. Można wrócić do naszego zadania i spróbować wykonać z uczniami „wymiarowy" rysunek. Czy można narysować odcinek o długości $\sqrt{3}$? A o długości $\sqrt{11}$?

Druga trudność jest z pogranicza arytmetyki i algebry. Zamieńmy w zadaniu $\sqrt{3}$ symbolem, np. literką „*a*". Jak wtedy wykonalibyśmy te działania?

O projekcie

Co już umiemy? Monitorowanie osiągnięć uczniów z zakresu matematyki.

➲ Kierownik projektu: dr Monika Jakubowska-Mirek

☼ www.pedagog.uw.edu.pl

⦿ Wydział Pedagogiczny Uniwersytetu Warszawskiego
ul. Mokotowska 16/20, 00-561 Warszawa

Celem projektu jest przekazanie uczniom, nauczycielom, dyrektorom szkół oraz organowi prowadzącemu (gminie) informacji na temat umiejętności matematycznych uczniów na rok przed egzaminem ósmoklasisty.